EXERCICE 4 :

La production en courte période et la loi des rendements décroissants.

En courte période, la production totale d'une entreprise varie en fonction du nombre d'unités employées du facteur travail (L), selon la relation : $PT = -L^3 + 10L^2 + 32L$.

L'équipement utilisé et la technique de production ne peuvent être pendant la période considérés.

a- Calculer et représenter sur un graphique le PT, le PM et Pm du travail, pour L variant de 1 à 9.

b- Analyser la forme de la courbe de PT.

c- Analyser la forme des courbes de PM et de PmL et expliquer leurs positions respectives.

d- Cette entreprise est-elle soumise à la loi des rendements décroissants ?

e- Déterminer la phase de production rationnelle de l'entreprise.

Solution de l'exercice n° 4 :

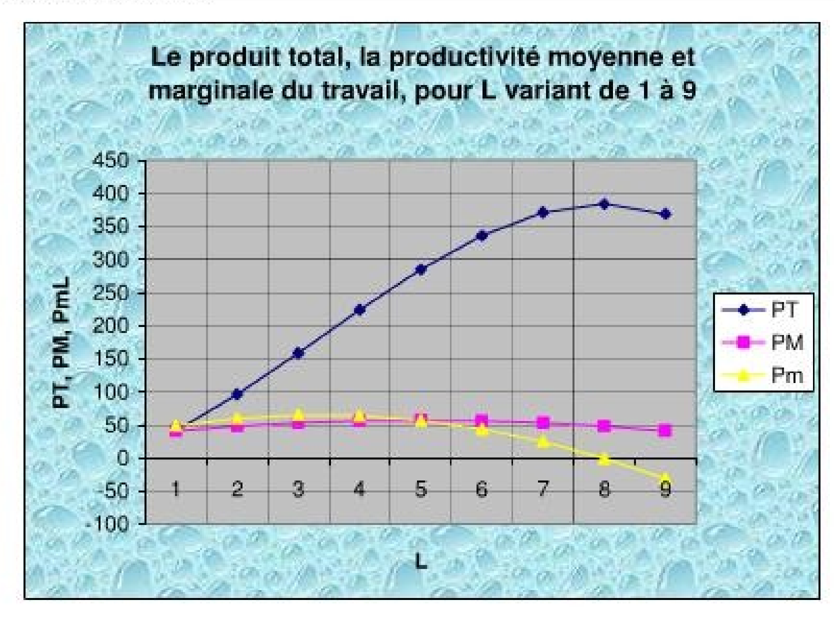
a- le calcul et la représentation de PT, PM, et Pm :

- Calcul du produit total : le tableau suivant présente les valeurs prises par le produit total pour L variant de 1 à 9. Ces valeurs sont en remplaçant l par ses valeurs successivement dans la fonction : $PT = -L^3 + 10L^2 + 32L$, alors pour L = 1 : PT = 1 + 10 + 32 = 41 ; pour L = 2 : PT = -8 + 40 + 64 = 96 etc.

- Calcul du produit moyen : $PM = \frac{PT}{L} = -L^2 + 10L + 32$. Pour L = 1 : PM = -1 + 10 + 32 = 41 ; pour L = 2 : PM = -4 + 20 + 32 = 48 etc.

- Calcul du produit marginal : $PmL = PT' = \frac{dPT}{dL} = -3L^2 + 20L + 32$. pour L = 1 : PmL = -3 + 20 + 32 = 49 ; pour L = 2 : PmL = -12 + 40 + 32 = 60 etc.

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PT	41	96	159	224	285	336	371	384	369
PM	41	48	53	56	57	56	53	48	41
Pm	49	60	65	64	57	44	25	0	-31



b- Forme de la courbe de PT :

L'analyse de la courbe de produit total impose l'étude des dérivées premières et secondes de la fonction de PT.

* Etude de la dérivée première PT' (L) $= \frac{dPT}{dL}$.

$PmL = -3L^2 + 20L + 32$.

PmL est une fonction du 2ème degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$. le signe de ce trinôme dépend du signe de son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. Or $b = 2b' = 10\times2$, donc $\Delta'^2 = b'^2 - ac = 10^2 - (-3)\times32 = 196$ et donc $\sqrt{\Delta'} = 14$.

$\Delta' > 0$ donc PmL s'annule pour les valeurs L_1 et L_2 :

$$L_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-10+14}{-3} = \frac{4}{-3} = -1{,}33 \langle 0.$$

$$L_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-24}{-3} = 8 \rangle 0.$$

On a donc : $PmL > 0$, pour $-1{,}33 < L < 8$.

Et $PmL < 0$, pour $L < -1{,}33$ et $L > 8$.

* Etude de la dérivée seconde de PT :

- $PT'' = PmL' = (-3L^2 + 20L + 32)' = -6L + 20$.
- $PmL' = \Rightarrow L = 20/6 = 3{,}33$.
- $PmL' > 0 \Rightarrow -6L + 20 > 0 \Rightarrow L < 3{,}33$.
- $PmL' < 0 \Rightarrow -6L + 20 < 0 \Rightarrow L > 3{,}33$.

L	$-\infty$ … -3,33	-3,33 … 0	0 … 3,33	3,33 … 8	8 … $+\infty$
PT'' = PmL' = $\frac{d^2PT}{dL^2}$ = -6L +20	+	+	+	-	-
PT' = PmL = $\frac{dPT}{dL}$ = $-3L^2 + 20L + 32$	- ↗	+ ↗	+ ↗	+ ↘	- ↘
PT = $-L^3 + 10L^2 + 32L$.	- ↘	+ ↗	+ ↗	- ↗	- ↘

- PmL est croissante pour 0 < L < 3,33 (PmL' > 0).
- Elle est croissante pour L > 3,33 (PmL' < 0).
- Elle est maximum pour L = 3,33 (PmL' = 0) et non pour L = 3 comme le suggère le tableau qui prend en compte que les valeurs entières de L.
- Pour les valeurs de L entre L = 0 et L = 3,33 le PT est croissant à taux croissant puisque PmL est positif et croissant.
- Pour L = 3,33 ; PT = 180,52. Il s'agit des coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe PT, c'est-à-dire un point à partir duquel la courbure de la courbe PT change de sens. N effet, pour L = 3,33, PT'' = PmL' = 0 et PT' = PmL ne change pas de signe (PmL > 0).
- Pour les valeurs de L entre L = 3,33 et L = 8, le PT croissant à tux décroissant puisque PmL est positif et décroissant (PmL' < 0). Pour L = 8, le PT est maximal : les deux conditions d'existence d'un maximum sont en effet réunies PmL = 0 et PmL' < 0.
- Pour L > 8, le PT est décroissant puisque la PmL est négative.

c- Forme de la courbe de PM et PmL :

On observe qu'à partir de la figure 1 que :
- Les deux courbes PM et PmL présentent chacune un maximum : max {PM} = 57 pour L = 5 et max {PmL} = 65 pour L = 3.
- La courbe de PmL coupe la courbe de PM en son maximum pour L = 5.
- Tant que la courbe PmL est située au dessus de la courbe PM, cette dernière est croissante ; dés que la courbe PmL est située au dessus de la courbe PM, après L = 5, la courbe PM est décroissante.

On peut expliquer la forme de la courbe de PM et déterminer qu'elle est coupée en son maximum par la courbe de PmL.

PM = $\frac{PT}{L}$ = $-L^2 + 10L + 32$.

- L'analyse de cette fonction passe par l'étude du signe de sa dérivée PM' (L) = $\frac{dPM}{dL}$ = -2L + 10.
- On a PM' = 0 $\Rightarrow$ -2L + 10 = 0 $\Rightarrow$ L = 5.
- PM' > 0 $\Rightarrow$ L < 5.

- PM' < 0 $\Rightarrow$ L > 5.

De ses résultats on peut déduire que :

- Pour 0 < L < 5, le PM est croissant (PM' est positif).
- Pour L > 5, le PM est décroissant (PM' est négative).
- Pour L = 5, le PmL ne croit plus et ne décroît pas non plus, il passe par un maximum (PM' = 0 et PM'' = -2 est toujours négatives).

* Explication des positions respectives des courbes PM et PmL.

- Une telle explication peut être menée en reprenant l'étude de la forme de la courbe PM à partir de l'analyse de la fonction dérivée de la fonction du produit moyen : PM' (L).

- PM = $\frac{PT}{L}$.

- PM' = $\frac{d\left(\frac{PT}{L}\right)}{dL}$.

- Il s'agit de la dérivée d'une fonction composée de la forme : y = $\frac{u}{v}$.

Soit : y' = $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

On peut donc écrire : PM' = $\frac{\frac{dPT}{dt}\times L-PT\times\frac{dL}{dL}}{L^2}$.

Soit : PM' = $\frac{LPmL-PT}{L^2} = \frac{PmL}{L}-\frac{PT}{L^2} = \frac{1}{L}(PmL-\frac{PT}{L})= \frac{1}{L}(PmL-PM)$.

- Etudier le signe de PM' revient à étudier le signe de (PmL – PM).

- PmL – PM > 0 $\Rightarrow$ PM' > 0 : vérifier si PmL > PM tant que le PmL > PM, ce dernier croit (PM' > 0).
- PmL – PM < 0 $\Rightarrow$ PM' < 0 : vérifier si PmL < PM. Dès que PmL < PM, ce dernier décroît (PM' < 0).
- PmL – PM = 0 $\Rightarrow$ PM' = 0 : vérifier si PmL = PM tant que PmL = PM, ce dernier atteint son maximum (PM' = 0) (pour L = 5, PmL = PM = 57).

d- Cette entreprise est soumise à la loi des rendements décroissants :

- D'autre part, on démontré et l'on peut observer sur la figure 1 qu'à partir de l'emploi de 3 unités du travail (plus exactement à partir de L = 3,33) la productivité marginale physique du travail décroît jusqu'à devenir négative pour L > 8.

e- La phase de production rationnelle de l'entreprise :

L'entrepreneur rationnel n'envisage que les combinaisons techniquement efficientes de facteurs de production.

- Soit l'élasticité de la production par rapport au facteur variable employé, le travail : e

$$= \frac{\frac{\Delta PT}{PT}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \times \frac{L}{PT}.$$

- On considère $\Delta L \longrightarrow 0$, on peut écrire :

$$e = \frac{dPT}{dL} \times \frac{L}{PT} = \frac{\frac{dPT}{dL}}{\frac{PT}{L}} = \frac{PmL}{PM}.$$

On sait que $\frac{dPT}{dL} = PmL$ et $\frac{PT}{L} = PM$.

-Pour L > 8 $\Rightarrow$ e < 0 (e = -0,76) : la productivité marginale du travail est négative et le produit total est décroissant. Pour tout L > 8, l'entrepreneur peut augmenter la quantité qu'il produit en réduisant l'emploi du travail ; la production est donc techniquement inefficiente à l'intérieur de cette phase.

- Pour 0 < L < 5 $\Rightarrow$ e > 1, car PmL > PM : la production croissante proportionnellement plus que le travail employé, il serait irrationnel pour le producteur de se situer à l'intérieur de cette phase de production.

- Le producteur ne peut donc se situer qu'à l'intérieur d'une phase de production définie pour un travail compris entre 5 et 8 unités. Cette phase est caractérisée par une élasticité de la production par rapport au travail positive (PmL > 0 et PM> 0) et inférieur à 1 (PmL < PM).

Elle comprend à la courbe de productivité marginale du travail dans sa partie décroissante, positive et inférieure au maximum du produit moyen.